Mikroökonomische Grundlagen der Agrarpolitik:
In der Nachfragetheorie verwendete Bezeichnungen, Gleichungen usw.

Arne Henningsen

(Version vom 7. Januar 2004)

Wichtiger Hinweis: Dieses Dokument ist nur vorläufig und kann noch Fehler enthalten. Hinweise auf Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte an `ahenningsen@agric-econ.uni-kiel.de`.

Allgemeine Bezeichnungen

n = Anzahl der Konsumgüter

C_i = Menge des konsumierten Gutes i

$c = (C_1, C_2, \ldots, C_n)'$ = (Spalten-)Vektor der Mengen der konsumierten Güter

P_i = Preis des konsumierten Gutes i

$p = (P_1, P_2, \ldots, P_n)'$ = (Spalten-)Vektor der Preise der konsumierten Güter

U = Nutzenniveau

$X = p'c = \sum_{i=1}^{n} P_i C_i$ = Gesamtausgaben bzw. Einkommen

$W_i = \frac{P_i C_i}{X}$ = Ausgabenanteil des Gutes i

Präferenzen

- Präferenzen sind eine Ordnungsrelation über die Menge von Konsumgüterbündeln $c \in \mathbf{C}$
- Konsistente Präferenzen, d.h. Präferenzen, die eine eindeutige Auswahl eines optimalen Konsumgütervektors zu lassen, haben folgende Eigenschaften:
  1. Vollständigkeit: $c^i \succ c^j$; $c^i \prec c^j$ oder $c^i \cong c^j \; \forall c^i, c^j \in \mathbf{C}$
  2. Reflexivität: $c^i \succeq c^i \; \forall c^i \in \mathbf{C}$
  3. Transitivität: $c^i \succeq c^j$ und $c^j \succeq c^k \Rightarrow c^i \succeq c^k \; \forall c^i, c^j, c^k \in \mathbf{C}$
- Ordinale Präferenzen können durch eine stetige Nutzenfunktion $U(c)$ abgebildet werden, wenn sie vollständig, reflexiv, transitiv und stetig sind: $c^i \succeq c^j \Leftrightarrow U(c^i) \geq U(c^j)$

Optimierungsansätze

primal: $\max_c U(c)$, s.t. $p'c \leq X$

dual: $\min_c p'c$, s.t. $U(c) \geq U_0$

Gleichungen und Funktionen

direkte Nutzenfunktion: $U = U(c)$
U ist das Nutzenniveau, das durch den Konsum der Güter c entsteht.

Budgetrestriktion: $X \geq p'c = \sum_{i=1}^{n} P_i C_i$ bzw. $X = p'c$ bei Nutzenmaximierung und Nichtsättigung

Ausgaben- oder Kostenfunktion: $X = e(p, U)$
X sind die minimalen Gesamtausgaben, die bei gegebenen Preise p notwendig sind, um das Nutzenniveau U zu erreichen

indirekte Nutzenfunktion: $U = v(p, X)$
U ist das maximale Nutzenniveau, das bei gegebenen Preisen p und gegebenen Gesamtausgaben X erreicht werden kann

Marshall'sche oder unkompensierte Nachfrage: $C_i = C_i(p, X)$
C_i ist die Menge des Gutes i, die bei gegebenen Preisen p und gegebenen Gesamtausgaben X nachgefragt wird. Sie könnte *primal* bei bekannter direkter Nutzenfunktion aus dieser und der Budgetrestriktion mit dem Lagrange-Ansatz hergeleitet werden:
$\mathcal{L} = U(c) + \lambda(X - p'c)$ mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_i} = \frac{\partial U}{\partial C_i} - \lambda P_i = 0$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = X - p'c = 0$
Aus der Lösung dieses Gleichungssystems kann $C_i = C_i(p, X)$ bestimmt werden.
Alternativ kann die Marshall'sche Nachfrage *dual* aus der indirekten Nutzenfunktion hergeleitet werden (Roy's Identität):
$C_i(p, X) = -\frac{\partial v(p, X)/\partial P_i}{\partial v(p, X)/\partial X}$

Hicks'sche oder kompensierte Nachfrage: $C_i^* = C_i^*(p, U)$
C_i^* ist die Menge des Gutes i, die bei gegebenen Preisen p und gegebenem Nutzenniveau U nachgefragt wird. Sie kann *dual* aus der Kostenfunktion hergeleitet werden (Shepard's Lemma):
$C_i^*(p, U) = \frac{\partial e(p, U)}{\partial P_i}$

Slutsky-Zerlegung: $\frac{\partial C_i}{\partial P_j} = \frac{\partial C_i^*}{\partial P_j} - \frac{\partial C_i}{\partial X} C_j$ bzw. $\Theta_{ij} = \Theta_{ij}^* + W_j \eta_i$

Herleitung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_i^*(p, U)}{\partial P_j} &= \frac{\partial C_i(p, e(p, U))}{\partial P_j} \\
&= \frac{\partial C_i(p, X)}{\partial P_j} + \frac{\partial C_i(p, e(p, U))}{\partial e} \frac{\partial e(p, U)}{\partial P_j} \\
&= \frac{\partial C_i(p, X)}{\partial P_j} + \frac{\partial C_i(p, X)}{\partial X} C_j
\end{aligned}
$$

Preiselastizitäten

Marshall'sche Preiselastizitäten:

$$\Theta_{ij} = \frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial P_j}{P_j}} = \frac{\partial C_i}{\partial P_j} \frac{P_j}{C_i}$$

Hicks'sche Preiselastizitäten:

$$\Theta_{ij}^* = \frac{\frac{\partial C_i^*}{C_i}}{\frac{\partial P_j}{P_j}} = \frac{\partial C_i^*}{\partial P_j} \frac{P_j}{C_i}$$

Einkommens- oder Ausgabenelastizitäten

$$\eta_i = \frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial X}{X}} = \frac{\partial C_i}{\partial X} \frac{X}{C_i}$$

Substitutionselastizitäten

Während die Grenzrate der Substitution die Steigung der Indifferenzkurve angibt, gibt die Substitutionselastizität ihre Krümmung an. Sie ist definiert als die prozentuale Änderung des (Konsum-)Mengenverhältnisses bei einer einprozentigen Änderung der Grenzrate der Substitution:

$$\sigma_{ij} = \frac{\frac{\partial \left(C_i/C_j\right)}{C_i/C_j}}{\frac{\partial GRS_{ij}}{GRS_{ij}}}$$

bzw.

$$\sigma_{ij} = \frac{\Theta_{ij}}{W_j} = \frac{\partial C_i}{\partial P_j} \frac{P_j}{C_i W_j} = \frac{\partial C_i}{\partial P_j} \frac{P_j X}{C_i C_j P_j} = \frac{\partial C_i}{\partial P_j} \frac{X}{C_i C_j}$$

wegen Symmetrie:

$$\sigma_{ij} = \frac{\Theta_{ij}}{W_j} = \frac{\Theta_{ji}}{W_i} = \sigma_{ji}$$

Theoretisch abgeleitete Bedingungen für konsistente Ausgabenfunktionen

1. homogen vom Grade eins in Preisen, d.h. $e\left(U, t \cdot p\right) = t \cdot e\left(U, p\right) \, \forall t > 0$
2. steigend in U und nicht-fallend in p, d.h. $\frac{\partial e}{\partial U} > 0$ und $\frac{\partial e}{\partial P_i} \geq 0 \, \forall i$
3. konkav in Preisen, d.h. die Hesse'sche Matrix (= Matrix der 2. Ableitungen $\frac{\partial^2 e}{\partial P_i \partial P_j}$) ist negativ semi-definit (notwendige Bedingung: $\frac{\partial^2 e}{(\partial P_i)^2} \leq 0$)

4. stetig in Preisen und die ersten und zweiten Ableitungen nach p existieren
5. die partiellen Ableitungen nach p entsprechen den Hicks'schen Nachfragefunktionen (Shepard's Lemma): $C_i^* = \frac{\partial e}{\partial P_i}$

Theoretisch abgeleitete Bedingungen für konsistente Nachfragefunktionen

1. Adding up, d.h. $\sum_{i=1}^{n} P_i C_i(p,X) = X$
2. (a) Hicks'sche Nachfrage: Homogenität vom Grade Null in Preisen, d.h. $C_i^*(t \cdot p, U) = C_i^*(p,U)\ \forall t > 0$

   (b) Marshall'sche Nachfrage: Homogenität vom Grade Null in Preisen und Einkommen/Ausgaben, d.h. $C_i(t \cdot p, t \cdot X) = C_i(p,X)\ \forall t > 0$
3. Symmetrie der Kreuzpreisableitungen der Hicks'schen Nachfragefunktionen (=Hesse'sche Matrix der Ausgabenfunktion, Young'sches Theorem), d.h. $\frac{\partial C_i^*}{\partial P_j} = \frac{\partial C_j^*}{\partial P_i}\ \forall i,j$
4. Negativität: Matrix der Kreuzpreisableitungen der Hicks'schen Nachfragefunktionen (=Hesse'sche Matrix der Kostenfunktion) ist semi-definit, notwendige Bedingung: alle diagonalen Elemente sind nicht-positiv: $\frac{\partial C_i^*}{\partial P_i} \leq 0\ \forall i$

Theoretische Bedingungen für Nachfragefunktionen und Elastizitäten

Aus "Adding up" folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial C_i}{\partial X} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \eta_i W_i = 1 \text{ (Engel-Bedingung)}$$

Herleitung: $\sum_{i=1}^{n} P_i C_i = X \Rightarrow \partial \left(\sum_{i=1}^{n} P_i C_i \right) / \partial X = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial C_i}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial X} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial C_i}{\partial P_j} + C_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Theta_{ij} W_i + W_j = 0\ \forall j \text{ (Cournot-Bedingung)}$$

Herleitung: $\sum_{i=1}^{n} P_i C_i = X \Rightarrow \partial \left(\sum_{i=1}^{n} P_i C_i \right) / \partial P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial C_i}{\partial P_j} = \frac{\partial X}{\partial P_j} = 0$

Aus Homogenität folgt:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial C_i^*}{\partial P_j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij}^* = 0\ \forall i \text{ (Homogenitäts-Bedingung)}$$

Herleitung: aus Euler'schem-Theorem, siehe `Mathe.pdf`

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial C_i}{\partial P_j} + X \frac{\partial C_i}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij} + \eta_i = 0\ \forall i \text{ (Euler- oder Slutsky-Schulz-Bedingung)}$$

Herleitung: aus vorheriger Gleichung und Slutsky-Zerlegung

Aus Symmetrie folgt:

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial P_j} = \frac{\partial C_j^*}{\partial P_i} \Leftrightarrow W_i \Theta_{ij}^* = W_j \Theta_{ji}^* \forall i,j \text{ (nach Young'schem Theorem)}$$

Aus Negativität folgt:

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial P_i} \leq 0 \Leftrightarrow \Theta_{ii}^* \leq 0 \forall i$$

Bedingte Elastizitäten

Beim so genannten "Multi-Stage-Budgeting" sind die Konsummengen auf den unteren Stufen Funktionen von den Preisen und den Ausgaben für die betrachtete Kategorie (k) insgesamt (und *nicht* von den Gesamtausgaben bzw. dem Einkommen)

$$C_i^k(p, X_k)$$

Die Einkommens- bzw. Ausgabenelastizitäten beziehen sich somit nicht mehr auf die Gesamtausgaben, sondern auf die Ausgaben für die betrachtete Kategorie

$$C_i^k(p, X_k) \Rightarrow \frac{\partial C_i^k}{\partial X_k} \Rightarrow \eta_i^k$$

Während die normalen Marshall'schen Preiselastizitäten von konstanten Gesamtausgaben ausgehen, gehen die Marshall'schen Elastizitäten auf einer unteren Stufe von konstanten Ausgaben für die Kategorie aus:

$$C_i^k(p, X_k) \Rightarrow \left. \frac{\partial C_i^k}{\partial P_j} \right|_{X_k = \text{konst.}} \Rightarrow \left. \Theta_{ij} \right|_{X_k = \text{konst.}} = \Theta_{ij}^k$$

Aus den bedingten Elastizitäten und Elastizitäten aus den höheren Stufen, kann man die unbedingten Elastizitäten berechnen:

$$\eta_i = \eta_i^k \eta_k$$
$$\Theta_{ij} = \Theta_{ij}^k + \eta_i^k w_j^k (1 + \Theta_{kk})$$

wobei η_k die Einkommens- bzw. Gesamtausgabenelastizität der Nachfrage nach der Kategorie k ist, w_j^k der Ausgabenanteil der des Gutes j innerhalb der Kategorie k ist und Θ_{kk} die Eigenpreiselastizität der gesamten Kategorie k ist.

"Almost Ideal Demand System" (AIDS)

Das AIDS wurde 1980 von Deaton and Muellbauer (1980a,b) vorgeschlagen und wird seitdem sehr häufig in der empirischen Nachfrageanalyse angewendet.

Ausgabenfunktion:

$$\ln e(p, U) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln P_i \ln P_j + \beta_0 U \prod_{i=1}^{n} P_i^{\beta_i}$$

Marshall'sche Nachfragefunktionen:

$$W_i = \frac{\partial \ln e}{\partial \ln P_i} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln P_j + \beta_i \ln \left(\frac{X}{P} \right)$$

mit $\ln P = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln P_i \ln P_j$

Theoretische Bedingungen für die Koeffizienten

1. "Adding up" ist erfüllt, wenn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0 \forall j$ und $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$
2. Homogenität ist erfüllt, wenn $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0 \forall i$
3. Symmetrie ist erfüllt, wenn $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

Elastizitäten

$$\begin{aligned}
\eta_i &= 1 + \frac{\beta_i}{W_i} \\
\Theta_{ij} &= -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{W_i} - \frac{\beta_i}{W_i}\left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \ln P_k\right) \\
\Theta_{ij}^{*} &= -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{W_i} + \frac{\beta_i}{W_i}\left(W_j - \alpha_j - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \ln P_k\right) + W_j \\
&= -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{W_i} + \frac{\beta_i \beta_j}{W_i}(\ln X - \ln P) + W_j
\end{aligned}$$

Lineare Approximation des AIDS (LA-AIDS)

Da der Translog-Preisindex $(\ln P)$ zu nicht-linearen Schätzgleichungen führt, haben schon Deaton and Muellbauer (1980a,b) vorgeschlagen, den Translog-Preisindex durch einen anderen Preisindex $(\ln P^*)$ zu approximieren, so dass man lineare Schätzgleichungen erhält. Deaton and Muellbauer (1980a,b) verwendeten den Stone-Index $(\ln P^* = \sum_{i=1}^{n} W_i \ln P_i)$. Mittlerweile hat sich aber herausgestellt, dass der logarithmische Laspeyres-Index $\left(\ln P^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{W_i} \ln P_i\right)$ zu kleineren Approximationsfehlern führt. Die Elastizitäten des LA-AIDS mit logarithmischem Laspeyres-Index können folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\eta_i &= 1 + \frac{\beta_i}{W_i} \\
\Theta_{ij} &= -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{W_i} - \frac{\beta_i \overline{W_j}}{W_i} \\
\Theta_{ij}^{*} &= -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{W_i} + W_j + \frac{\beta_i \left(W_j - \overline{W_j}\right)}{W_i}
\end{aligned}$$

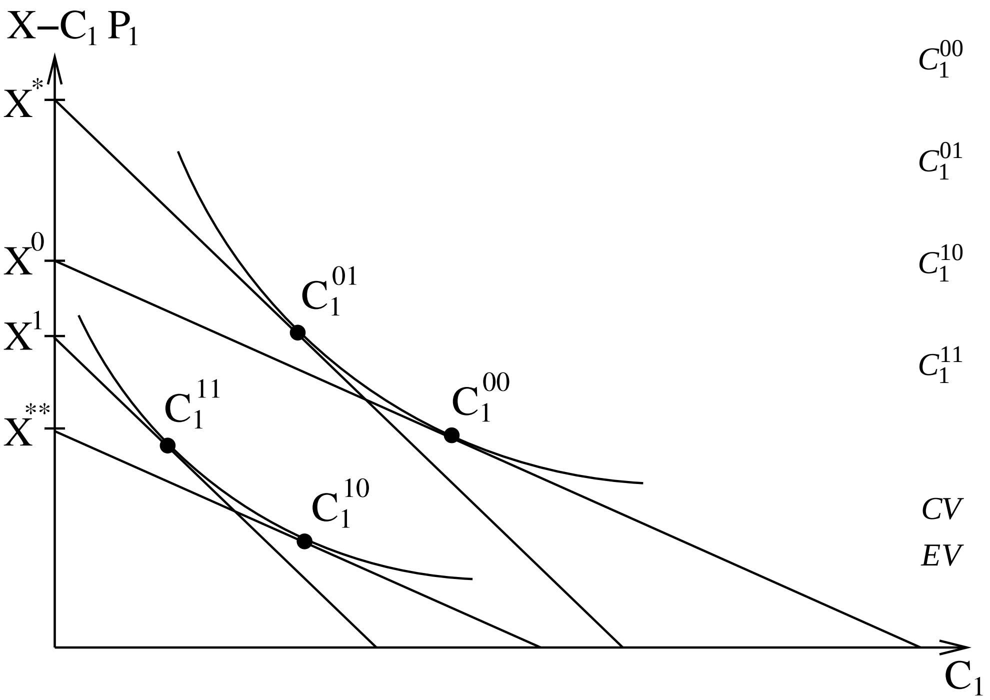
Wohlfahrtsmaße

Es gibt folgende allgemeine Wohlfahrtsmaße (siehe Abbildung 1):

1. Kompensierende Variation (compensating variation, CV): Wenn der Geldbetrag CV einem Konsumenten nach der Preis- und Einkommensänderung weggenommen wird, bleibt dieser auf dem gleichen Nutzenniveau wie vor den Änderungen: $v(p^1, X^1 - CV) = v(p^0, X^0) = U^0$ bzw. $CV = \mu(p^1, p^1, X^1) - \mu(p^1, p^0, X^0) = e(p^1, v(p^1, X^1)) - e(p^1, v(p^0, X^0)) = e(p^1, U^1) - e(p^1, U^0) = X^1 - e(p^1, u^0)$
   Die CV ist der maximale Geldbetrag, den ein jemand bezahlen würde, um die (für ihn positive) Politikänderung zu erhalten.
   Die CV ist der minimale (negative) Geldbetrag, den jemand erhalten müsste, um der (für ihn negativen) Politikänderung zuzustimmen.

2. Äquivalente Variation (equivalent variation, EV): Wenn der Geldbetrag EV einem Konsumenten gezahlt wird, erreicht dieser durch diese Zahlung (ohne die Preis- und Einkommensänderung) das gleiche Nutzenniveau wie durch die Preis- und Einkommensänderung: $v(p^0, X^0 + EV) = v(p^1, X^1) = U^1$ bzw. $EV = \mu(p^0, p^1, X^1) - \mu(p^0, p^0, X^0) = e(p^0, v(p^1, X^1)) - e(p^0, v(p^0, X^0)) = e(p^0, U^1) - e(p^0, U^0) = e(p^0, U^1) - X^0$
   Die EV ist der minimale Geldbetrag, den jemand erhalten müsste, um die (für ihn positive) Politikänderung abzulehnen.
   Die EV ist der maximale (negative) Geldbetrag, den jemand bezahlen würde, um die (für ihn negative) Politikänderung zu verhindern.

Abbildung 1: **Wohlfahrtsmaße**



$$
\begin{aligned}
C_1^{00} &= C_1^*\left(U^0, P_1^0\right) \\
&= C_1\left(X^0, P_1^0\right) \\
C_1^{01} &= C_1^*\left(U^0, P_1^1\right) \\
&= C_1\left(X^*, P_1^1\right) \\
C_1^{10} &= C_1^*\left(U^1, P_1^0\right) \\
&= C_1\left(X^{**}, P_1^0\right) \\
C_1^{11} &= C_1^*\left(U^1, P_1^1\right) \\
&= C_1\left(X^1, P_1^1\right) \\
\\
CV &= X^1 - X^* \\
EV &= X^{**} - X^0
\end{aligned}
$$

Quelle: nach Varian (1999, S. 252).

Wohlfahrtsmaße ohne Einkommensänderungen ($X^1 = X^0$)

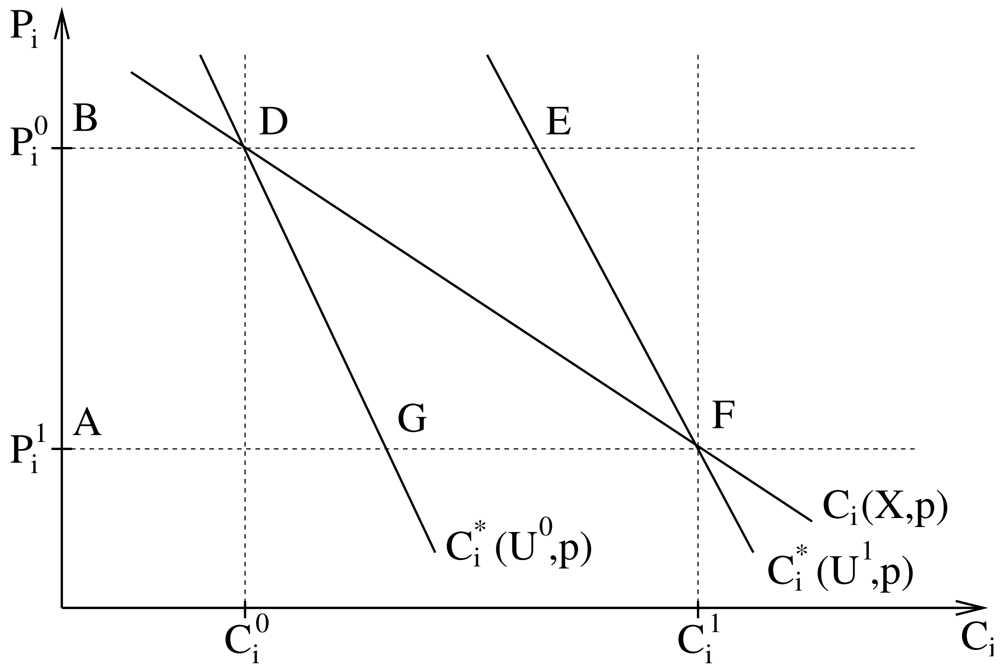
Wenn sich nur Preise ändern und das Einkommen konstant bleibt, gibt es noch ein drittes Wohlfahrtsmaß (siehe Abbildung 2):

1. Veränderung der Konsumentenrente: ΔKR = Fläche zwischen Ordinate und Nachfragekurve: ABDF (kann nicht direkt interpretiert werden, ist theoretisch nicht konsistent)

2. Kompensierende Variation (compensating variation): $CV = X - e(p^1, U^0) = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$ = Fläche zwischen Ordinate und Hicks'scher Nachfragekurve bei U^0: ABDG. Die CV ist der maximale Geldbetrag, den ein Konsumenten bezahlen würde, um die Preissenkung zu erhalten. (Die CV ist der minimale (negative) Geldbetrag, den ein Konsument erhalten müsste, um der Preiserhöhung zuzustimmen.): $v\left(p^1, X - CV\right) = v\left(p^0, X\right) = U^0$

3. Äquivalente Variation (equivalent variation): $EV = e(p^0, U^1) - X = e(p^0, U^1) - e(p^1, U^1)$ = Fläche zwischen Ordinate und Hicks'scher Nachfragekurve bei U^1: ABEF. Die EV ist der minimale Geldbetrag, den ein Konsument erhalten müsste, um die Preissenkung abzulehnen. (Die EV ist der maximale (negative) Geldbetrag, den ein Konsument bezahlen würde, um die Preiserhöhung zu verhindern): $v\left(p^0, X + EV\right) = v\left(p^1, X\right) = U^1$

Abbildung 2: **Wohlfahrtsmaße ohne Einkommensänderungen**



Quelle: nach Deaton and Muellbauer (1980b, S. 187).

Beziehungen zwischen den drei Wohlfahrtsmaßen (ohne Einkommensänderungen)

Wie aus Abbildung 2 ersichtlich ist, liegt das durch die Veränderung der Konsumentenrente berechnete Wohlfahrtsmaß zwischen den durch die kompensierende Variation (CV) und die äquivalente Variation (EV) berechneten Wohlfahrtsmaßen.

Aus der Slutsky-Zerlegung $(\Theta^*_{ii} = \Theta_{ii} + W_i \eta_i)$ kann man sehen, dass bei Gütern mit sehr geringem Ausgabenanteil (W_i) oder sehr geringer Einkommenselastizität (η_i) die Hicks'sche und die Marshall'sche Nachfrage kaum voneinander abweichen $(\Theta^*_{ii} \approx \Theta_{ii})$. Unter diesen Bedingungen ist somit $EV \approx CV \approx \Delta KR$.

Da die meisten Güter eine positive Einkommenselastizität haben $(\eta_i > 0)$ und der Ausgabenanteil immer positiv ist, folgt aus der Slutsky-Zerlegung $\Theta^*_{ii} > \Theta_{ii}$ bzw. $|\Theta^*_{ii}| < |\Theta_{ii}|$ (gilt nur wenn $\Theta_{ii} < 0$) und somit bei einer Preissenkung $CV < \Delta KR < EV$ (siehe Abbildung 2). Die Wohlfahrtsmaße sind natürlich auch auf Preiserhöhungen anwendbar. Die Formeln bleiben gleich, in der Grafik müssten nur p^0 und p^1 sowie U^0 und U^1 ausgetauscht werde. Es ergeben sich somit für Veränderung der Konsumentenrente (ΔKR), die kompensierende Variation (CV) und die äquivalente Variation (EV) negative Vorzeichen und im Normalfall $(\eta_i > 0)$ wäre $|CV| > |\Delta KR| > |EV|$.

Literatur

Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980a). An Almost Ideal Demand System. *The American Economic Review*, 70:312–326.

Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980b). *Economics and Consumer Behaviour*. Cambridge University Press, Cambridge.

Sadoulet, E. and de Janvry, A. (1995). *Quantitative Development Policy Analysis*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton & Company, New York, 3rd edition.

Varian, H. R. (1999). *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*. W. W. Norton & Company, New York, 5th edition.