

# Mikroökonomische Grundlagen der Agrarpolitik:

## In der Produktionstheorie verwendete Bezeichnungen, Gleichungen usw.

Arne Henningsen

(Version vom 3. November 2005)

**Wichtiger Hinweis:** Dieses Dokument ist nur vorläufig und kann noch Fehler enthalten. Hinweise auf Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte an [ahenningsen@agric-econ.uni-kiel.de](mailto:ahenningsen@agric-econ.uni-kiel.de).

### Allgemeine Bezeichnungen

$N^o$  = Anzahl der Outputs

$X_k^o$  = Menge des Outputs  $k$

$x^o = (X_1^o, X_2^o, \dots, X_{N^o}^o)'$  = (Spalten-)Vektor der Outputmengen

$P_k^o$  = Preis des Outputs  $k$

$p^o = (P_1^o, P_2^o, \dots, P_{N^o}^o)'$  = (Spalten-)Vektor der Outputpreise

$N^i$  = Anzahl der Inputs

$X_k^i$  = Menge des Inputs  $k$

$x^i = (X_1^i, X_2^i, \dots, X_{N^i}^i)'$  = (Spalten-)Vektor der Inputmengen

$P_k^i$  = Preis des Inputs  $k$

$p^i = (P_1^i, P_2^i, \dots, P_{N^i}^i)'$  = (Spalten-)Vektor der Inputpreise

$F$  = Anzahl der fixen Faktoren

$Z_k$  = Menge des fixen Faktors  $k$

$z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_F)'$  = (Spalten-)Vektor der Mengen der fixen Faktoren

$P_k^s$  = Schattenpreis des fixen Faktors  $k$

$p^s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_F^s)'$  = (Spalten-)Vektor der Schattenpreise der fixen Faktoren

$N = N^o + N^i$  = Anzahl der Netputs

$x = (X_1, X_2, \dots, X_N)'$  =  $(x^{o'}, -x^{i'})'$  = (Spalten-)Vektor der Netputmengen

$p = (P_1, P_2, \dots, P_N)'$  =  $(p^{o'}, p^{i'})'$  = (Spalten-)Vektor der Netputpreise

$C = p^{i'} x^i = \sum_{k=1}^{N^i} P_k^i X_k^i$  = Kosten

$\pi = p^{o'} x^o - p^{i'} x^i = \sum_{k=1}^{N^o} P_k^o X_k^o - \sum_{k=1}^{N^i} P_k^i X_k^i = p' x = \sum_{k=1}^N P_k X_k$  = Gewinn (Profit)

$S_k = \frac{P_k^i X_k^i}{C}$  = Kostenanteil

$M_k = \frac{P_k X_k}{\pi}$  = Profitanteil

$\epsilon_{kj} = \frac{\partial X_k}{\partial P_j} \frac{P_j}{X_k}$  = Preiselastizität der Netputmenge  $k$  in Bezug auf den Netputpreis  $j$

$\Delta_{kj}$  = Kronecker-Delta:  $\Delta_{kj} = 1 \forall k = j$  und  $\Delta_{kj} = 0 \forall k \neq j$

## Funktionen

$x^o = x^o(x^i, z)$  = Produktionsfunktion:  $x^o$  ist (sind) die maximale(n) Outputmenge(n), die mit den Inputs  $x^i$  bei gegebenen fixen Faktoren  $z$  produziert werden kann (können).

$f(x^o, x^i, z) = 0$  oder  $f(x, z) = 0$  = Produktionsfunktion in impliziter Schreibweise

$C = C(x^o, p^i, z)$  = Kostenfunktion:  $C$  sind die minimalen Kosten, die bei gegebenen Inputpreisen  $p^i$  und gegebenen fixen Faktoren  $z$  zur Produktion der Outputmenge(n)  $x^o$  notwendig sind.

$\pi = \pi(p^o, p^i, z) = \pi(p, z)$  = Profitfunktion:  $\pi$  ist der maximale Gewinn, der bei gegebenen Outputpreisen  $p^o$  und Inputpreisen  $p^i$  (Netputpreisen  $p$ ) und gegebenen fixen Faktoren  $z$  erzielt werden kann.

$X_k^{i*} = X_k^{i*}(x^o, p^i, z)$  = Bedingte (auch konditionale oder kompensierte) Inputnachfrage:  $X_k^{i*}$  ist die Menge des Inputs  $k$ , die bei gegebener Outputmenge  $x^o$ , gegebenen Inputpreisen  $p^i$  und gegebenen fixen Faktoren  $z$  nachgefragt wird. Herleitung aus der Kostenfunktion durch Shepard's Lemma:  $X_k^{i*} = \partial C / \partial P_k^i$

$X_k^i = X_k^i(p^o, p^i, z) = X_k^i(p, z)$  = (Unbedingte) Inputnachfrage:  $X_k^i$  ist die Menge des Inputs  $i$ , die bei gegebenen Outputpreisen  $p^o$ , Inputpreisen  $p^i$  (Netputpreisen  $p$ ) und fixen Faktoren  $z$  nachgefragt wird. Herleitung aus der Profitfunktion durch Hotelling's Lemma:  $X_k^i = -\partial \pi / \partial P_k^i$

$X_k^o = X_k^o(p^o, p^i, z) = X_k^o(p, z)$  = Outputangebot:  $X_k^o$  ist die Menge des Outputs  $i$ , die bei gegebenen Outputpreisen  $p^o$ , Inputpreisen  $p^i$  (Netputpreisen  $p$ ) und fixen Faktoren  $z$  angeboten wird. Herleitung aus der Profitfunktion durch Hotelling's Lemma:  $X_k^o = \partial\pi/\partial P_k^o$

$X_k = X_k(p, z)$  = Netputnachfrage und -angebot:  $X_k$  ist die Menge des Netputs  $i$  (Outputs  $X_k^o$  bzw. negativen Inputs  $-X_k^i$ ), die bei gegebenen Netputpreisen  $p$  und fixen Faktoren  $z$  angeboten bzw. nachgefragt wird. Herleitung aus der Profitfunktion durch Hotelling's Lemma:  $X_k = \partial\pi/\partial P_k$

## Ansätze

### Primaler Ansatz

Gewinnmaximierung mit der Produktionsfunktion als Nebenbedingung

$$\max_{x^o, x^i} \pi = p^{o'} x^o - p^{i'} x^i, \text{ s.t. } f(x^o, x^i, z) = 0 \text{ bzw. } \max_x \pi = p'x, \text{ s.t. } f(x, z) = 0$$

Lösung dieses Maximierungsproblems mit dem Lagrange-Ansatz:

$$\mathcal{L}(x^o, x^i, \lambda) = p^{o'} x^o - p^{i'} x^i + \lambda f(x^o, x^i, z) \text{ bzw. } \mathcal{L}(x, \lambda) = p'x + \lambda f(x, z)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k^o} = P_k^o + \lambda \frac{\partial f}{\partial X_k^o} = 0 \text{ und } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k^i} = -P_k^i + \lambda \frac{\partial f}{\partial X_k^i} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k} = P_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial X_k} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(x^o, x^i, z) = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(x, z) = 0$$

Wenn die Produktionsfunktion bekannt ist, kann das Gleichungssystem gelöst und die optimalen Input- und Outputmengen bestimmt werden.

### Dualer Ansatz

Kostenminimierung mit der Produktionsfunktion als Nebenbedingung

$$C(x^o, p^i, z) = \min_{x^i} p^{i'} x^i, \text{ s.t. } f(x^o, x^i, z) = 0$$

Auch dieses Minimierungsproblem könnte mit dem Lagrange-Ansatz gelöst werden:

$$\mathcal{L}(x^i, \lambda) = p^{i'} x^i + \lambda f(x^o, x^i, z)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k^i} = P_k^i + \lambda \frac{\partial f}{\partial X_k^i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(x^o, x^i, z) = 0$$

Wenn die Produktionsfunktion bekannt ist, kann das Gleichungssystem gelöst und die optimalen (bedingten) Inputmengen bestimmt werden.

Wenn die Produktionsfunktion aber nicht bekannt ist, reicht es aus, die Kostenfunktion  $C = C(x^o, p^i, z)$  zu bestimmen. Diese Kostenfunktion stellt somit sowohl die Technologie als auch das (gewinnmaximierende) Verhalten dar. Gleiches gilt für die Profitfunktion:

$$\pi(p^o, p^i, z) = \max_{x^o, x^i} p^{o'} x^o - p^{i'} x^i, \text{ s.t. } f(x^o, x^i, z) = 0 \text{ bzw. } \pi(p^o, p^i, z) = \max_{x^o, x^i} p^{o'} x^o - c(x^o, p^i, z)$$

Beim dualen Ansatz wird also nicht von einer Produktionsfunktion ausgegangen, welche die Technologie repräsentiert, sondern gleich von einer Kosten- bzw. Profitfunktion, die nun sowohl die Technologie als auch das (gewinnmaximierende) Verhalten abbildet.

Aus der Kosten- oder Profitfunktion lässt sich wieder eine Produktionsfunktion  $f^*$  ableiten. Dabei ist  $f^*$  identisch mit  $f$ , wenn  $f$  keine nicht-monotonen und nicht-konkaven Bereiche hat.

Der Vorteil des dualen Ansatzes liegt darin, dass auch bei komplizierter Technologie die Angebots- und Nachfragefunktionen einfach über Hotelling's bzw. Shepard's Lemma (aus komplizierten Profit- oder Kostenfunktionen) hergeleitet werden können, während die Ableitung der Angebots- und Nachfragefunktionen im primalen Ansatz über den Lagrange-Ansatz bei komplizierten Produktionsfunktionen nur schwer und häufig auch nicht analytisch möglich ist.

## Eigenschaften von Funktionen

### Produktionsfunktionen

In Bezug auf die Inputs

- stetig
- monoton steigend:  $\frac{\partial x^o}{\partial x_j^i} \geq 0$
- quasikonkav:  $f(x^i) > f(x^{i*}) \Rightarrow f(t \cdot x^i + (1-t)x^{i*}) > f(x^{i*}) \forall 0 < t < 1$

### Kostenfunktionen

In Bezug auf Outputmengen und fixe Faktoren:

1. Monotonie:

Nicht-abnehmend in Outputmengen  $\frac{\partial C}{\partial X_k^o} \geq 0$  für alle  $i$

Nicht-zunehmend in fixen Faktoren, wenn auch die Produktionsfunktion monoton nicht-abnehmend in fixen Faktoren ist:  $\frac{\partial C}{\partial Z_k} \leq 0$  für alle  $i$

2. Bei einer Skaleneizität von  $\lambda = 1$ : homogen vom Grade eins in Outputmengen und fixen Faktoren:  $C(t \cdot x^o, p^i, t \cdot z) = t \cdot C(x^o, p^i, z)$  für  $t > 0$

3. Wenn die Produktionsfunktion konkav in allen (variable und fixen) Inputs ist: Konkav in Outputmengen  $x^o$  und fixen Faktoren  $z$ : Hesse'sche Matrix (=Matrix der 2. Differentiale) in Bezug auf Outputmengen und fixe Faktoren ist positiv semidefinit (notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial^2 C}{(\partial X_k^o)^2} \geq 0 \text{ und } \frac{\partial^2 C}{(\partial Z_k)^2} \geq 0)$$

In Bezug auf Inputpreise:

1. Monotonie: Nicht-abnehmend in Inputpreisen:  $\frac{\partial C}{\partial P_k^i} \geq 0$  für alle  $i$

2. Homogen vom Grade eins in Inputpreisen  $p^i$ :  $C(x^o, t \cdot p^i, z) = t \cdot C(x^o, p^i, z)$  für  $t > 0$

3. Konkav in Inputpreisen  $p^i$ : Hesse'sche Matrix (=Matrix der 2. Differentiale) in Bezug auf Inputpreise ist negativ semidefinit (notwendige Bedingung:  $\frac{\partial^2 C}{(\partial P_k^i)^2} \leq 0$ )

4. Stetig in Inputpreisen, zumindest für  $p^i > 0$
5. Partielle Differentiale nach den Inputpreisen entsprechen den bedingten Nachfragefunktionen:  $\frac{\partial C}{\partial P_k^i} = X_k^i$  (Shepard's Lemma)

## Profittfunktionen

In Bezug auf Preise:

1. Monotonie:  
 Nicht-abnehmend in Outputpreisen:  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k^o} \geq 0$  bzw.  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k} \geq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k > 0$   
 Nicht-zunehmend in Inputpreisen:  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k^i} \leq 0$  bzw.  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k} \leq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k < 0$
2. Homogen vom Grade eins in allen Preisen:  $\pi(t \cdot p^o, t \cdot p^i, z) = t \cdot \pi(p^o, p^i, z)$  bzw.  $\pi(t \cdot p, z) = t \cdot \pi(p, z)$  für  $t > 0$
3. Konvex in allen Preisen  $p$ : Hesse'sche Matrix (=Matrix der 2. Differentiale) in Bezug auf alle Preise ist positiv semidefinit (notwendige Bedingung:  $\frac{\partial^2 \pi}{(\partial P_k)^2} \geq 0$ )
4. Stetig in allen Preisen, zumindest für  $p > 0$ .
5. Partielle Differentiale nach den Netputpreisen entsprechen den (unbedingten) Angebots- und (negativen) Nachfragefunktionen:  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k^o} = X_k^o$  und  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k^i} = -X_k^i$  bzw.  $\frac{\partial \pi}{\partial P_k} = X_k$  (Hotelling's Lemma)

In Bezug auf fixe Faktoren:

1. Monotonie: Nicht-abnehmend in fixen Faktoren, wenn auch die Produktionsfunktion monoton nicht-abnehmend in fixen Faktoren ist:  $\frac{\partial \pi}{\partial Z_k} \geq 0$  für alle  $i$
2. Bei einer Skalenelastizität von  $\lambda = 1$ : homogen vom Grade eins in fixen Faktoren:  $\pi(p^o, p^i, t \cdot z) = t \cdot \pi(p^o, p^i, z)$  bzw.  $\pi(p, t \cdot z) = t \cdot \pi(p, z)$  für  $t > 0$
3. Konkav in fixen Faktoren, wenn die Produktionsfunktion konkav in allen (variablen und fixen) Inputs ist: Hesse'sche Matrix (=Matrix der 2. Differentiale) in Bezug auf alle fixen Faktoren ist negativ semidefinit (notwendige Bedingung:  $\frac{\partial^2 \pi}{(\partial Z_k)^2} \leq 0$ )
4. Stetig in allen quasi-fixen Faktoren, zumindest für  $z > 0$
5. Partielle Differentiale nach den fixen Faktoren entsprechen den Schattenpreisen:  $\frac{\partial \pi}{\partial Z_k} = P_k^s$

## Outputangebots- und Faktornachfragefunktionen

1. Homogenität:
2. (a) Bedingte Nachfragefunktion:  
 Homogen vom Grade Null in Inputpreisen:  $X_k^{i*}(x^o, t \cdot p^i, z) = X_k^{i*}(x^o, p^i, z)$   
 Bei einer Skalenelastizität von  $\lambda = 1$ : homogen vom Grade eins in Outputmengen und fixen Faktoren:  $X_k^{i*}(t \cdot x^o, p^i, t \cdot z) = t \cdot X_k^{i*}(x^o, p^i, z)$
- (b) Unbedingte Angebots- und Nachfragefunktionen:  
 Homogen vom Grade Null in allen Preisen:  $X_k^o(t \cdot p^o, t \cdot p^i, z) = X_k^o(p^o, p^i, z)$  und  $X_k^i(t \cdot p^o, t \cdot p^i, z) = X_k^i(p^o, p^i, z)$  bzw.  $X_k(t \cdot p, z) = X_k(p, z)$   
 Bei einer Skalenelastizität von 1: homogen vom Grade eins in fixen Faktoren:  $X_k^o(p^o, p^i, t \cdot z) = t \cdot X_k^o(p^o, p^i, z)$  und  $X_k^i(p^o, p^i, t \cdot z) = t \cdot X_k^i(p^o, p^i, z)$  bzw.  $X_k(p, t \cdot z) = t \cdot X_k(p, z)$
3. Symmetrie (Young'sches Theorem):  $\frac{\partial X_k}{\partial P_j} = \frac{\partial X_j}{\partial P_k}$   
 wegen  $\frac{\partial X_k}{\partial P_j} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \pi}{\partial P_k} \right)}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial P_j \partial P_k} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \pi}{\partial P_j} \right)}{\partial P_k} = \frac{\partial X_j}{\partial P_k}$
4. Positivität:  $\frac{\partial X_k}{\partial P_k} \geq 0$ , d.h. für Inputs:  $\frac{\partial |X_k|}{\partial P_k} \leq 0$

## Preiselastizitäten

### Allgemeine Definition von Preiselastizitäten

$$\epsilon_{kj} = \frac{\frac{\partial X_k}{X_k}}{\frac{\partial P_j}{P_j}} = \frac{\partial X_k}{\partial P_j} \frac{P_j}{X_k}$$

### Eigenschaften

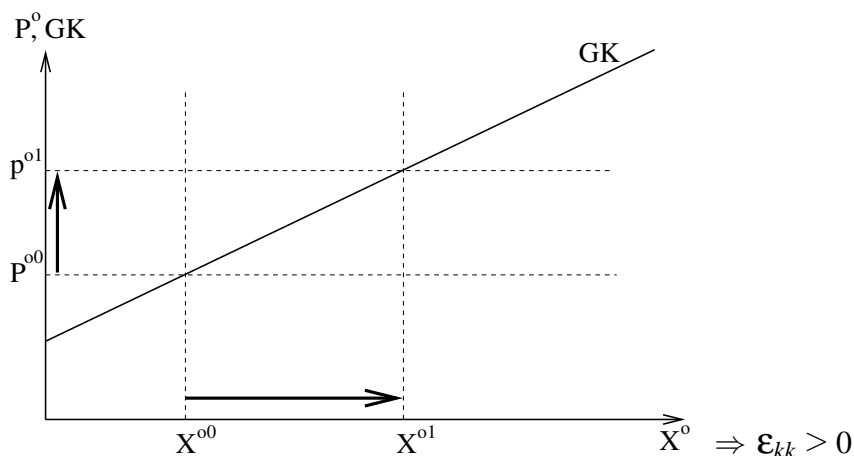
1. aus Homogenität in Preisen folgt:  $\sum_{j=1}^N \epsilon_{kj} = 0$
2. aus Symmetrie folgt:  $M_k \epsilon_{kj} = M_j \epsilon_{jk}$
3. aus Konvexität folgt:  $\epsilon_{kk} \geq 0$  für Outputs und  $\epsilon_{kk} \leq 0$  für Inputs

## Vorzeichen der Preiselastizitäten

### Output-Output

- generell: optimale Outputmenge bei Outputpreis = Grenzkosten ( $p^o = GK$ ) (im Bereich steigender  $GK$ )

- Eigenpreiselastizitäten:



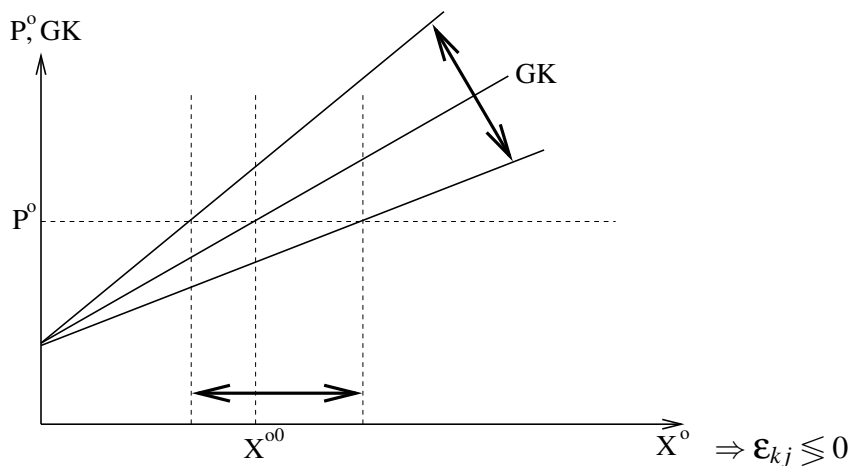
- Kreuzpreiselastizitäten:

wenn sich ein anderer Outputpreis ändert und es irgendeinen Zusammenhänge in der Produktion (z.B. von beiden verwendete fixe Faktoren) gibt, ändern sich die *GK* (z.B. durch geänderte Schattenpreise) und somit auch die optimale Outputmenge  $\Rightarrow \epsilon_{kj} \leq 0$

Das Vorzeichen der Elastizitäten ist aber nicht bestimmt:

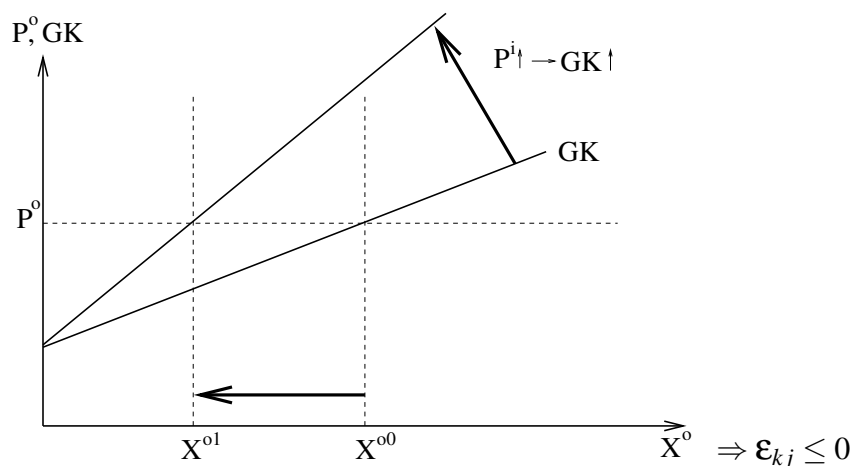
$P_1^o \uparrow \rightarrow X_1^o \uparrow \rightarrow GK_2 \uparrow \rightarrow X_2^o \downarrow$  substitutiv ( $\epsilon_{kj} < 0$ ) (Beispiel: Weizen und Gerste)

oder  $P_1^o \uparrow \rightarrow X_1^o \uparrow \rightarrow GK_2 \downarrow \rightarrow X_2^o \uparrow$  komplementär ( $\epsilon_{kj} > 0$ ) (Beispiel: Milch und Kälber)



### Output-Input

- wenn es nur einen Output und nur einen Input gibt, führt ein höherer Inputpreis zu steigenden *GK* und somit zu einer geringeren Outputmenge:

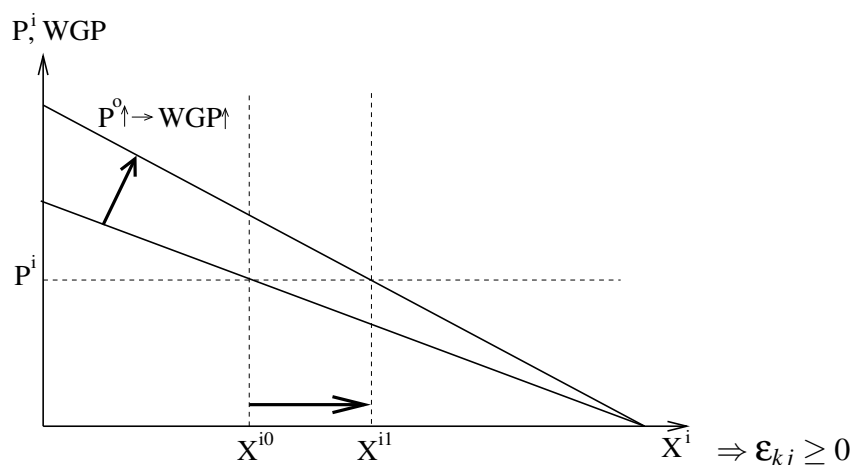


Dies kann man auch aus der Homogenitätsbedingung ableiten:  $\epsilon^{oo} + \epsilon^{oi} = 0$  und  $\epsilon^{oo} \geq 0$   
 $\Rightarrow \epsilon^{oi} \leq 0$

- bei mehreren Outputs oder mehreren Inputs ist das Vorzeichen unbestimmt, weil die *GK* z.B. wegen gefallener Schattenpreise auch sinken können (siehe Abbildung Output-Output-Kreuzpreiselastizitäten)  
 Beispiel: Raps-Saat wird teurer  $\rightarrow$  weniger Rapsanbau  $\rightarrow$  geringerer Schattenpreis des Bodens  $\rightarrow$  mehr Getreideproduktion

### Input-Output

- generell: optimale Inputmenge bei Inputpreis = Wertgrenzprodukt ( $p^i = WGP$ ) (im Bereich eines sinkenden *WGP*)
- wenn es nur einen Output und nur einen Input gibt, führt ein höherer Outputpreis zu einem steigenden *WGP* und somit zu einer höheren Inputmenge:

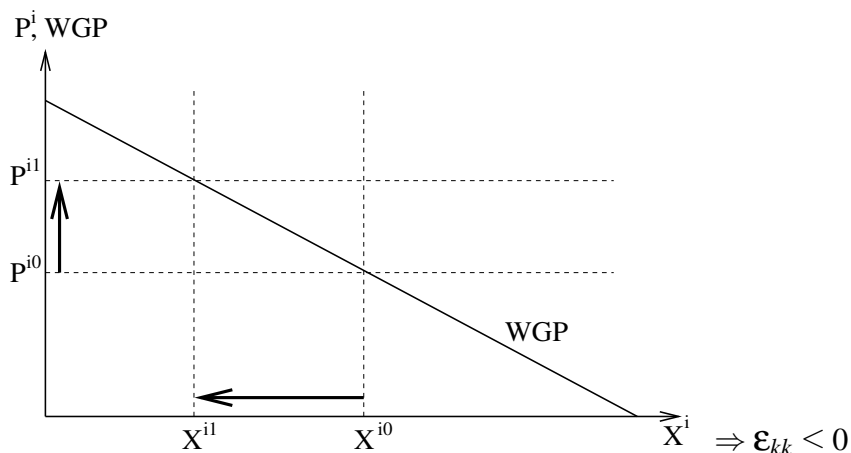


Dies kann man auch aus der Homogenitätsbedingung ableiten:  $\epsilon^{ii} + \epsilon^{io} = 0$  und  $\epsilon^{ii} \leq 0$   
 $\Rightarrow \epsilon^{io} \geq 0$

- bei mehreren Outputs oder mehreren Inputs ist das Vorzeichen unbestimmt, weil das *WGP* wegen einer anderen Input- oder Produktionsstruktur auch sinken kann (siehe Abbildung Input-Input-Kreuzpreiselastizitäten)  
 Beispiel: Weizen wird teurer  $\rightarrow$  weniger Rapsanbau  $\rightarrow$  geringeres *WGP* von Rapsaat  $\rightarrow$  weniger Rapsaat

### Input-Input

- Eigenpreiselastizitäten:



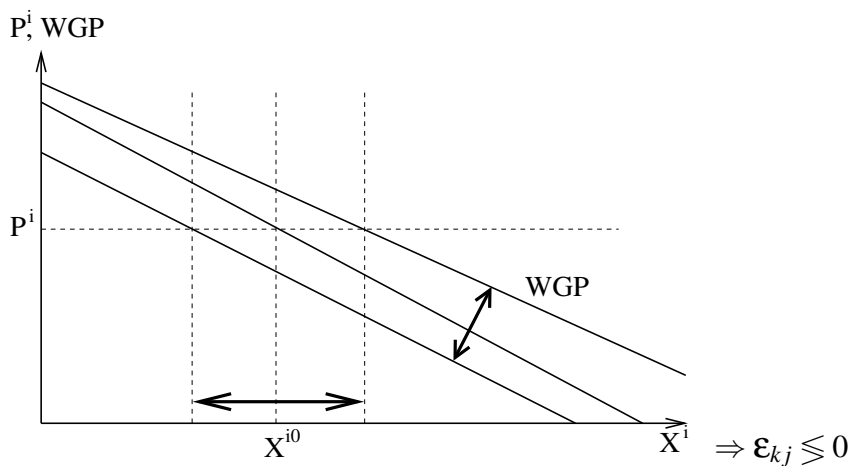
- Kreuzpreiselastizitäten:

wenn sich ein anderer Inputpreis ändert und es irgendeinen Zusammenhang in der Produktion gibt, ändert sich das *WGP* (z.B. durch geänderte Inputintensitäten) und somit auch die optimale Inputmenge  $\Rightarrow \epsilon_{kj} \leq 0$

Das Vorzeichen der Elastizitäten ist aber nicht bestimmt:

$P_1^i \uparrow \rightarrow X_1^i \downarrow \rightarrow WGP_2 \uparrow \rightarrow X_2^i \uparrow$  substituiv ( $\epsilon_{kj} > 0$ ) (Beispiel: Harnstoff und Kalk-Ammonsalpeter) oder

$P_1^i \uparrow \rightarrow X_1^i \downarrow \rightarrow WGP_2 \downarrow \rightarrow X_2^i \downarrow$  komplementär  $GK \downarrow$  ( $\epsilon_{kj} < 0$ ) (Beispiel: Ferkel und Schrot)



### Grenzprodukt

Output, der durch eine zusätzliche Inpoteinheit erzeugt wird

$$GP_j = \frac{\partial X^o}{\partial X_j^i}$$

Ein Einheit des Inputs  $j$  mehr  $\rightarrow GP_j$  Einheiten mehr Output

## partielle Produktionselastizität

Änderung der Outputmenge in Prozent durch eine einprozentigen Steigerung einer Inputmenge

$$\sigma_j = \frac{\partial X^o}{\partial X_j^i} \frac{X_j^i}{X^o} = \text{GP}_j \frac{X_j^i}{X^o}$$

Ein Prozent des Inputs  $j$  mehr  $\rightarrow \sigma_j$  Prozent mehr Output

## Grenzrate der Substitution

Austauschverhältnis zwischen zwei Inputs = (negative) Steigung der Isoquante

Grenzrate der Substitution zwischen Input  $k$  und Input  $j$

$$\text{GRS}_{kj} = \frac{dX_j^i}{dX_k^i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial X_k^i}}{\frac{\partial f}{\partial X_j^i}} = - \frac{\text{GP}_k}{\text{GP}_j}$$

## Substitutionselastizitäten

### Input-Input (One-Factor-One-Price)

Während die Grenzrate der Substitution die Steigung der Isoquante angibt, gibt die Substitutionselastizität die Krümmung der Isoquante an. Sie ist definiert als die prozentuale Änderung des Faktorverhältnisses bei einer einprozentigen Änderung der Grenzrate der Substitution:

$$\begin{aligned} \sigma_{kj} &= \frac{\frac{\partial \left( X_j^i / X_k^i \right)}{X_j^i / X_k^i}}{\frac{\partial \text{GRS}_{kj}}{\text{GRS}_{kj}}} = \frac{\partial \left( X_j^i / X_k^i \right)}{\partial \text{GRS}_{kj}} \frac{\text{GRS}_{kj}}{X_j^i / X_k^i} \\ &= \frac{\partial \ln \left( X_j^i / X_k^i \right)}{\partial \ln \left( \text{GRS}_{kj} \right)} = \frac{\partial \ln \left( X_j^i / X_k^i \right)}{\partial \ln \left( dX_j^i / dX_k^i \right)} \\ &= \frac{\partial \ln \left( X_j^i / X_k^i \right)}{\partial \ln \left( P_k^i / P_j^i \right)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\sigma_{kj} = \frac{\epsilon_{kj}}{M_j} = \frac{\partial X_k^i}{\partial P_j^i} \frac{P_j^i}{X_k^i M_j} = \frac{\partial X_k^i}{\partial P_j^i} \frac{P_j^i \pi}{X_k^i X_j^i P_j^i} = \frac{\partial X_k^i}{\partial P_j^i} \frac{\pi}{X_k^i X_j^i}$$

wegen Symmetrie:

$$\sigma_{kj} = \frac{\epsilon_{kj}}{M_j} = \frac{\epsilon_{jk}}{M_k} = \sigma_{jk}$$

**Input-Input (Two-Factors-One-Price)**

$$R_{kj}^l = \frac{\sigma_{kl}}{\sigma_{jl}}$$

**Output-Output (One-Factor-One-Price)**

Während die Grenzrate der Transformation die Steigung der Transformationskurve angibt, gibt die Substitutionselastizität die Krümmung der Transformationskurve an. Sie ist definiert als die prozentuale Änderung des Outputverhältnisses bei einer einprozentigen Änderung der Grenzrate der Transformation:

$$\sigma_{kj} = \frac{\frac{\partial (X_j^o / X_k^o)}{X_j^o / X_k^o}}{\frac{\partial \text{GRT}_{kj}}{\text{GRT}_{kj}}}$$

bzw.

$$\sigma_{kj} = \frac{\epsilon_{kj}}{M_j} = \frac{\partial X_k^o}{\partial P_j^o} \frac{P_j^o}{X_k^o M_j} = \frac{\partial X_k^o}{\partial P_j^o} \frac{P_j^o \pi}{X_k^o X_j^o P_j^o} = \frac{\partial X_k^o}{\partial P_j^o} \frac{\pi}{X_k^o X_j^o}$$

wegen Symmetrie:

$$\sigma_{kj} = \frac{\epsilon_{kj}}{M_j} = \frac{\epsilon_{jk}}{M_k} = \sigma_{jk}$$

**Output-Output (Two-Factors-One-Price)**

$$R_{kj}^l = \frac{\sigma_{kl}}{\sigma_{jl}}$$

**Schattenpreise**

Schattenpreis des fixen Faktors  $Z_k$ :

$$P_k^s = \frac{\partial \pi}{\partial Z_k}$$

**Skalenelastizität**

Skaleneffekte, „economies of scale“

Berechnung aus einer Produktionsfunktion

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N^i} \frac{\partial f}{\partial X_j^i} \frac{X_j^i}{X^o}$$

Berechnung aus einer beschränkten Profitfunktion

$$\lambda = \sum_{k=1}^F \frac{\partial \pi}{\partial Z_k} \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F \frac{P_k^s Z_k}{\pi}$$

$$\lambda \left\{ \begin{array}{l} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{abnehmende} \\ \text{konstante} \\ \text{zunehmende} \end{array} \right\} \text{Skaleneffekte}$$

# Funktionsformen

## Cobb-Douglas

Vorteile:

1. wenige Koeffizienten  $\rightarrow$  wenige Beobachtungen zur ökonomischen Schätzung notwendig
2. linear in Koeffizienten  $\rightarrow$  leicht ökonomisch zu schätzen
3. wenn  $0 \leq \alpha_k \leq 1$  fast immer konkav in Argumenten (notwendige Bedingung)  
wenn  $\alpha_k \leq 0$  oder  $\alpha_k \geq 1$  fast immer konvex in Argumenten (notwendige Bedingung)
4. Koeffizienten sind gut interpretierbar (als Anteile und Elastizitäten)

Nachteile:

1. sehr wenige Koeffizienten  $\rightarrow$  unflexibel
2. Anteile und Elastizitäten (=Koeffizienten) sind konstant
3. Alle Substitutionselastizitäten  $\sigma_{kj} = -1$

## Funktionsform

unbeschränkten/beschränkten Profitfunktion (d.h. ohne/mit fixe(n) Faktoren):

$$\ln \pi(p) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \ln P_k \Big| + \sum_{k=1}^F \phi_k \ln Z_k$$

Ableitung der Angebots- und Nachfragefunktionen

$$X_k = \frac{\partial \pi}{\partial P_k} = \frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln P_k} \frac{\pi}{P_k} = \alpha_k \frac{\pi}{P_k} \rightarrow M_k = \alpha_k$$

Preiselastizitäten der Netputs

$$\epsilon_{kj} = -\Delta_{kj} + M_j = -\Delta_{kj} + \alpha_j$$

Homogenität in Preisen

$$\lambda = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \pi}{\partial P_k} \frac{P_k}{\pi} = \sum_{k=1}^N X_k \frac{P_k}{\pi} = \sum_{k=1}^N M_k = \sum_{k=1}^N \alpha_k$$

Schattenpreise:

$$P_k^s = \frac{\partial \pi}{\partial Z_k} = \frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln Z_k} \frac{\pi}{Z_k} = \phi_k \frac{\pi}{Z_k}$$

Skalenelelastizität

$$\lambda = \sum_{k=1}^F \frac{\partial \pi}{\partial Z_k} \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F P_k^s \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F \frac{\pi}{Z_k} \phi_k \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F \phi_k$$

## Eigenschaften

In Bezug auf Preise:

1. Monotonie:  
Nicht-abnehmend in Outputpreisen:  $\alpha_k \geq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k > 0$   
Nicht-zunehmend in Inputpreisen:  $\alpha_k \leq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k < 0$
2. Homogen vom Grade eins in allen Preisen:  $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$
3. Konkav in allen Preisen  $p$ :  $\alpha_k \leq 0$  oder  $\alpha_k \geq 1$
4. Stetig in allen Preisen: für  $p > 0$  immer gegeben

In Bezug auf fixe Faktoren:

1. Monotonie: Nicht-abnehmend in fixen Faktoren:  $\phi_k \geq 0$  für alle  $i$
2. Bei einer Skalenelastizität von  $\lambda = 1$ :  $\sum_{k=1}^F \phi_k = 1$
3. Konkav in fixen Faktoren:  $\phi_k \leq 1$  für alle  $i$
4. Stetig in fixen Faktoren: für  $z > 0$  immer gegeben

## Translog

Vorteile:

1. viele Parameter  $\rightarrow$  flexibel
2. linear in Koeffizienten  $\rightarrow$  leicht ökonometrisch zu schätzen

Nachteile

1. viele Parameter  $\rightarrow$  zur ökonometrischen Schätzung werden viele Beobachtungen benötigt (insbesondere bei vielen Argumenten)
2. häufig nicht oder nur lokal konvex oder konkav

## Funktionsform

unbeschränkten/beschränkten Profitfunktion (d.h. ohne/mit fixe Faktoren):

$$\ln \pi(p, z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \ln P_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{kj} \ln P_k \ln P_j$$


---


$$+ \sum_{k=1}^F \phi_k \ln Z_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^F \gamma_{kj} \ln Z_k \ln Z_j$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^F \delta_{kj} \ln P_k \ln Z_j$$

Parameterrestriktionen:

- $\beta_{kj} = \beta_{jk}$  und  $\gamma_{kj} = \gamma_{jk}$ , da  $\ln P_k \ln P_j = \ln P_j \ln P_k$  und  $\ln Z_k \ln Z_j = \ln Z_j \ln Z_k$  (sonst perfekte Multikollinearität in der Profitfunktion) (Symmetrie)

Ableitung der Angebots- und Nachfragefunktionen

$$X_k = \frac{\partial \pi}{\partial P_k} = \frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln P_k} \frac{\pi}{P_k} = \frac{\pi}{P_k} \left( \alpha_k + \sum_{j=1}^N \beta_{kj} \ln P_j \middle| + \sum_{j=1}^F \delta_{kj} \ln Z_j \right)$$

$$\rightarrow M_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^N \beta_{kj} \ln P_j \middle| + \sum_{j=1}^F \delta_{kj} \ln Z_j$$

Preiselastizitäten der Netputs

$$\epsilon_{kj} = -\Delta_{kj} + M_j + \frac{\beta_{kj}}{M_k}$$

Homogenität in Preisen

$$\lambda = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \pi}{\partial P_k} \frac{P_k}{\pi} = \sum_{k=1}^N X_k \frac{P_k}{\pi} = \sum_{k=1}^N M_k = \sum_{k=1}^N \left( \alpha_k + \sum_{j=1}^N \beta_{kj} \ln P_j \middle| + \sum_{j=1}^F \delta_{kj} \ln Z_j \right)$$

Schattenpreise:

$$P_k^s = \frac{\partial \pi}{\partial Z_k} = \frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln Z_k} \frac{\pi}{Z_k} = \frac{\pi}{Z_k} \left( \phi_k + \sum_{j=1}^F \gamma_{kj} \ln Z_j + \sum_{j=1}^N \delta_{jk} \ln P_j \right)$$

Skalenelelastizität

$$\lambda = \sum_{k=1}^F \frac{\partial \pi}{\partial Z_k} \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F P_k^s \frac{Z_k}{\pi} = \sum_{k=1}^F \left( \phi_k + \sum_{j=1}^F \gamma_{kj} \ln Z_j + \sum_{j=1}^N \delta_{jk} \ln P_j \right)$$

## Eigenschaften

In Bezug auf Preise:

1. Monotonie:

Nicht-abnehmend in Outputpreisen:  $M_k \geq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k > 0$  (nur lokal überprüfbar)

Nicht-zunehmend in Inputpreisen:  $M_k \leq 0$  für alle  $i$  mit  $X_k < 0$  (nur lokal überprüfbar)

2. Homogen vom Grade eins in allen Preisen:  $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^N \beta_{kj} = 0 \forall j$  und  $\sum_{k=1}^N \delta_{kj} = 0 \forall j$

(wegen Symmetrie auch  $\sum_{j=1}^N \beta_{kj} = 0 \forall k$ ).

3. Konvex in allen Preisen: Häufig nicht oder nur lokal gegeben (nur lokal überprüfbar)

4. Stetig in allen Preisen: für  $p > 0$  immer gegeben

In Bezug auf fixe Faktoren:

1. Monotonie: Nicht-abnehmend in fixen Faktoren:  $P_k^s \geq 0$  für alle  $i$  (nur lokal überprüfbar)
2. Bei einer Skalenelelastizität von 1:  $\sum_{k=1}^F \phi_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^F \gamma_{kj} = 0 \forall j$  und  $\sum_{j=1}^F \delta_{kj} = 0 \forall k$  (wegen Symmetrie auch  $\sum_{j=1}^F \gamma_{kj} = 0 \forall k$ )
3. Konkav in fixen Faktoren: Häufig nicht oder nur lokal gegeben (nur lokal überprüfbar)
4. Stetig in fixen Faktoren: für  $z > 0$  immer gegeben

## Literatur

Sadoulet, E. and de Janvry, A. (1995). *Quantitative Development Policy Analysis*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton & Company, New York, 3rd edition.

Varian, H. R. (1999). *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*. W. W. Norton & Company, New York, 5th edition.